Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 18

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

8 de mayo de 2019

1. Demostrar $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$

Sean Λ y η las siguientes matrices:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Queremos comprobar que se cumple $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$.

$$\eta\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ \beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \Lambda\left(\eta\Lambda\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ \beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2\left(1-\beta^2\right) & \gamma^2\beta - \gamma^2\beta \\ \gamma^2\beta - \gamma^2\beta & -\gamma^2\left(1-\beta^2\right) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Sabemos que $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, por lo tanto $\gamma^2 = \left(1-\beta^2\right)^{-1}$, por lo que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma^2\left(1-\beta^2\right) & \gamma^2\beta - \gamma^2\beta \\ \gamma^2\beta - \gamma^2\beta & -\gamma^2\left(1-\beta^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta \tag{4}$$

2. Demostrar que $\left(\partial_0 - \partial_1^2\right)\phi = 0$ no es invariante.

Sabemos que las derivadas transforman de la siguiente forma

$$\partial_0 = \gamma\left(\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}\right) \qquad \partial_1 = \gamma\left(\partial_{1'} - \beta\partial_{0'}\right) \tag{5}$$

Por lo tanto

$$\partial_1^2 = \gamma^2 \left(\partial_{1'} - \beta\partial_{0'}\right)^2 = \gamma^2 \left(\partial_{1'}^2 + \beta^2\partial_{0'}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'}\right) \tag{6}$$

$$\left(\partial_0 - \partial_1^2\right)\phi = \left(\gamma\left(\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}\right) - \gamma^2\left(\partial_{1'}^2 + \beta^2\partial_{0'}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'}\right)\right)\phi \neq \left(\partial_{0'} - \partial_{1'}^2\right)\phi \tag{7}$$

Para comprobar que efectivamente no son iguales (pues a veces dos ecuaciones muy distintas pueden ser iguales) vamos a comprobar el siguiente ejemplo: $\phi = x^0$

$$\left(\gamma\left(\partial_{0'} - \beta\partial_{1'}\right) - \gamma^2\left(\partial_{1'}^2 + \beta^2\partial_{0'}^2 - 2\beta\partial_{0'}\partial_{1'}\right)\right)x^0 = \gamma \tag{8}$$

$$\left(\partial_{0'} - \partial_{1'}^2\right)x^0 = 1 \tag{9}$$